1986 Ecoles Militaires
Ecole de l'Air (Option M+P et Ecole de l'Air (Option 1A

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR — ANNEE 1986

PREMIERE EPREUVE A OPTION — MATHEMATIQUES

T - TA

(Durée : 3 h 00 - Coefficient : 9)

---==oOOo==---

Rappels et définitions :

- Soit la courbe Γ image de l'intervalle I par la fonction γ; pour que le point $\gamma(t_o)$ soit un point d'inflexion, il suffit que les deux vecteurs dérivés $\vec{\gamma}'(t_o)$ et $\vec{\gamma}''(t_o)$ soient non nuls et colinéaires.

Dans tout ce problème on considère des courbes dans le plan euclidien orienté, muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

I - On considère la courbe (Γ) définie par l'application

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t + \cos(2t) + 1 \\ a \sin t + \sin(2t) \end{pmatrix}$$

où a est un réel

1) Déterminer l'équation polaire de Γ

2) Montrer que les points d'inflexion de Γ correspondent aux racines de l'équation: $6a\cos t + a^2 + 8 = 0$

Préciser pour quelles valeurs de a, Γ admet des points d'inflexion et leur nombre.

3) A chaque point M du plan, on associe la fonction

$f_M : t \longmapsto f_M(t) = \|\overrightarrow{M_t M}\|^2$ où M_t est le point du plan dont les coordonnées sont celles du vecteur $\vec{\gamma}(t)$

On supposera que le point M_{t_o} considéré dans la suite du I n'est pas un point d'inflexion de Γ

a) Montrer que si la fonction f_M admet un extremum en $t = t_o$ alors M appartient à la normale en M_{t_o} à Γ

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

b) Montrer qu'il existe un point C_{t_o} de la normale N_{t_o} en M_{t_o} à la courbe Γ qui partage cette normale N_{t_o} en deux demi-droites N'_{t_o} et N''_{t_o} telles que

$\forall M \in N'_{t_o}$, f_M admet un maximum en $t = t_o$

$\forall M \in N''_{t_o}$, f_M admet un minimum en $t = t_o$

4) Soit C_{t_o} le point défini au 3)

En étudiant un développement limité de $f_{C_{t_o}}(t)$ au voisinage de t_o, montrer que, si $a \in \mathbb{R} - \{0, -1, 1\}$ et si $t_o \neq 0$

$f_{C_{t_o}}$ n'admet en $t = t_o$ ni maximum ni minimum

II - On suppose dans cette partie que $a = 0$

1) Représenter graphiquement la courbe Γ correspondante

2) Déterminer le centre de courbure de la courbe Γ en M_{t_o}

3) Que peut-on dire de la fonction f associée à ce centre de courbure ?

III - On suppose dans cette partie $a = 1$

1) Montrer que le rayon de courbure $\rho(t_o)$ au point M_{t_o} de la courbe Γ est

$$\rho(t_o) = \frac{(5 + 4\cos t_o)^{3/2}}{9 + 6\cos t_o}$$

2) Préciser les vecteurs $\vec{T}_{t_o}$ (vecteur unitaire de la demi-tangente positive) et $\vec{N}_{t_o}$ (vecteur unitaire de la demi-normale positive)

3) Déterminer les coordonnées du centre de courbure C_{t_o} au point M_{t_o} de la courbe.

4) a) En écrivant $\| \overrightarrow{M_t C_{t_o}} \|^2 = \| \overrightarrow{M_t M_{t_o}} + \overrightarrow{M_{t_o} C_{t_o}} \|^2$

Montrer que la fonction $\varphi : t \longmapsto \varphi(t) = \| \overrightarrow{M_t C_{t_o}} \|^2$

peut s'écrire

$$\varphi(t) = \varphi(t_o) + 2 \overrightarrow{M_{t_o} M_t} \cdot \overrightarrow{C_{t_o} M_{t_o}} + \| \overrightarrow{M_{t_o} M_t} \|^2$$

b) Utiliser cette écriture pour donner un développement limité de $\varphi(t) - \varphi(t_o)$ au voisinage de t_o, à l'ordre 3, en fonction de $\gamma(t_o)$, $\gamma'(t_o)$, $\gamma''(t_o)$,...

IV - Dans cette partie on suppose $a = 2$

1) On désigne par Q_t la projection de l'origine O sur la tangente en M_t à Γ $(t \in]-\pi, +\pi[)$

Montrer que $\overrightarrow{OQ_t} = (\gamma(t) \cdot \vec{N}_t)\, \vec{N}_t$.

(où $\vec{N}_t$ est le vecteur unitaire de la demi-normale positive en M_t)

2) Déterminer les coordonnées de Q_t (on pourra exprimer $\gamma(t)$ et $\vec{N}_t$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ où $\vec{u} = \cos t\, \vec{i} + \sin t\, \vec{j}$).

3) Représenter la courbe Γ

4) Donner, en construisant des points de $\{ Q_t \}_{t \in]-\pi, +\pi[}$, une allure générale de cet ensemble.

Note de l'U.P.S. : Texte vicié par l'ambiguité, l'absence ou la confusion des hypothèses au point $M(t_o)$ I 2) faux si $a = 2$ ou $a = 4$ II 3) a faux si $\vec{\gamma}'(t_o) = 0$ etc...